Dozent: Dr. Martin Friesen

Tutor: Dennis Schroers

Finanzmathematik
Wintersemester 2018 / 2019

Blatt 4

- Abgabe bis **Donnerstag 22.11.2018 um 12:00.**
- Abgabe ins Postfach 89 auf Ebene D13.

Hinweis: Um die Korrekturen der Abgaben zu vereinfachen, soll in allen Aufgaben soll zuerst die allgemeine Formel angegeben (gegebenenfalls auch hergeleitet) werden. Im Anschluss sollen die einzusetzenden Parameter angegeben werden. Das Ausrechnen selbst braucht dann nicht weiter erläutert werden (d.h. es reicht dann das Ergebnis anzugeben).

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine Funktion (Zufallsvariable) $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist der Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega), \qquad p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\}) \in [0, 1].$$

Beweisen Sie mittels der Definition vom Erwartungswert, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

(a) Sind X, Y Zufallsvariablen, so gilt $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

(b) Ist X eine Zufallsvariable und $a \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$.

(c) Ist $X(\omega) = 1$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$, so gilt $\mathbb{E}(X) = 1$.

(d) Sei $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(X) = 0 \Longleftrightarrow X(\omega) = 0 \ \ \forall \omega \in \Omega \quad \text{mit } \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Betrachte das Ein-Perioden-Modell mit einem Asset und einem Bond (d.h. $d = 1$). Die Anfangspreise seien gegeben durch $\pi = (\pi_0, \pi_1) = (1, 2)$, er Bond sei

festverzinst mit Zinsatz $r \in (0,1)$ und das risky asset habe einen Endpreis gegeben durch

$$S_1(\omega) = \pi_1 + a(\omega), \quad \text{wo} \quad a(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = +1 \\ -1, & \omega = -1 \end{cases},$$

wo der endliche Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ gegeben ist durch

$$\Omega = \{-1, +1\}, \quad \mathbb{P}(\{+1\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{-1\}) = 1 - p, \quad p \in (0,1).$$

(a) Berechnen Sie für eine Strategie ξ den Gewinn $G(\xi)(\omega)$ für jedes ω. Bestimmen Sie den erwarteten Gewinn $\mathbb{E}(G(\xi))$.

(b) Lässt der Markt Arbitragemöglichkeiten zu? Wenn ja, so geben Sie mindestens eine solche Möglichkeit an. Falls nicht, so beweisen Sie dieses.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Betrachte das Ein-Perioden-Modell mit einem Asset und einem Bond. Die Anfangspreise seien gegeben durch $\pi = (\pi_0, \pi_1) = (1, 3)$, die Zinsrate sei $r \in (0,1)$ und das risky asset habe einen Endpreis gegeben durch

$$S(\omega) = \pi_1 a(\omega), \quad \text{wo} \quad a(\omega) = \begin{cases} \frac{11}{10}, & \omega = +1 \\ \frac{9}{10}, & \omega = -1 \\ 1, & \omega = 0 \end{cases},$$

wo der endliche Wahrscheinlichkeitsraum gegeben ist durch $\Omega = \{-1, 0, +1\}$ sowie

$$\mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\{+1\}) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(\{-1\}) = \frac{1}{4}.$$

(a) Berechnen Sie für eine Strategie ξ den Gewinn $G(\xi)(\omega)$ für jedes ω. Bestimmen Sie den erwarteten Gewinn $\mathbb{E}(G(\xi))$.

(b) Lässt der Markt Arbitragemöglichkeiten zu? Wenn ja, sogeben Sie mindestens eine solche Möglichkeit an. Falls nicht, so beweisen Sie dieses.

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Betrachten wir einen Markt in einer Periode mit 2 Assets und 1 Bond (d.h. $d = 2$). Die Anfangspreise seien gegeben durch $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$. Der Bond sei festverzinst mit Zinsatz $r \in (0,1)$. Die Endpreise der risky assets seien gegeben durch

$$S_1(\omega) = S_2(\omega) = \pi_1 a(\omega), \quad \text{wo} \quad a(\omega) = \begin{cases} a_+, & \omega = +1 \\ a_-, & \omega = -1 \end{cases},$$

wo $a_+ \geq 1$, $a_- \in (0, 1]$ und der endliche Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ gegeben ist durch

$$\Omega = \{-1, +1\}, \quad \mathbb{P}(\{+1\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{-1\}) = 1 - p, \quad p \in (0,1).$$

(a) Berechnen Sie die erwarteten Preise $\mathbb{E}(S_1)$ und $\mathbb{E}(S_2)$ sowie den erwarteten Gewinn $\mathbb{E}(G(\xi))$.

(b) Zeigen Sie dass die Relation

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_1}{1+r}\right) = \pi_1, \qquad \mathbb{E}\left(\frac{S_2}{1+r}\right) = \pi_2 \tag{1}$$

genau dann gilt, wenn

$$a_+ p + a_-(1-p) = 1 + r \quad \text{und} \quad \pi_1 = \pi_2.$$

(c) Welche Auswirkungen hat die Relation (1) auf den erwarteten Gewinn?